

高速二相流中に発生する 2次元膨張波に関する研究

中川 勝文[†] 原田 敦史[‡]

Two-dimensional Rarefaction Waves in the High-speed Two-phase Flow

Masafumi NAKAGAWA[†] and Atsushi HARADA[‡]

Abstract

Two-phase flow nozzles are used in the total flow system for geothermal power plants and in the ejector of the refrigerant cycle, etc. One of the most important functions of a two-phase flow nozzle is to convert the thermal energy to the kinetic energy of the two-phase flow. The kinetic energy of the two-phase flow exhausted from a nozzle is available for all applications of this type. There exist the shock waves or rarefaction waves at the outlet of a supersonic nozzle in the case of non-best fitting expansion conditions when the operation conditions of the nozzle are widely chosen. The purpose of the present study is to elucidate theoretically the character of the rarefaction waves at the outlet of the supersonic two-phase flow nozzle.

Two-dimensional basic equations for the compressible two-phase flow are introduced considering the inter-phase momentum transfer. Sound velocities are obtained from these equations by using monochromatic wave approximation. Those depend on the relaxation time that determines the momentum transfer. The two-phase flow with large relaxation times has a frozen sound velocity, and with small one has an equilibrium sound velocity. Rarefaction waves which occurred behind the two-phase flow nozzle are calculated by the CIP method. Although the frozen Mach number, below one, controls these basic equations, the rarefaction waves appeared for small relaxation time. The Mach line behind which the expansion starts depends on the inlet velocity and the relaxation time. Those relationships are shown in this paper. The pressure expansion curves are only a function of the revolution angle around the corner of the nozzle outlet for the relaxation time less than 0.1. For the larger relaxation time, the pressure decays because of internal friction caused by inter phase momentum transfer, and the expansion curves are a function of not only the angle but also the flow direction. The calculated expansion curves are compared with the experimental ones. The calculations considered only the compressibility of the gas phase, but those resembled with the curve of the experiment in which the phase changes occurred.

Key Words: *Two-phase flow, Nozzle, Supersonic, Rarefaction wave, Mist, Mach number*

記号

a	: 音速	[m/s]	x	: 空間座標, ノズル出口からの距離	[m]
d	: 液滴径	[m]			
f	: 速度ポテンシャルの θ 関数部	[m/s]	x_0	: 入口クオリティ	
k	: 伝播数	[rad/m]	α	: ボイド率	
K	: 定数 $a_0 p_0 / (1 - \alpha_0)$	[Pa]	γ	: 比熱比	
L	: 入口長さ	[m]	μ	: 粘性係数	[Pa·s]
M	: マッハ数		θ	: 角座標	[rad]
p	: 圧力	[Pa]	ρ	: 密度	[kg/m ³]
r	: 半径座標	[m]	τ	: 緩和時間	[s]
t	: 時間	[s]	ϕ	: 速度ポテンシャル	[m ² /s]
v	: 速度	[m/s]	ω	: 角周波数	[rad/s]

受付日: 2007年3月19日, 第44回日本伝熱シンポジウムより受付, 担当エディター: 河村 洋

[†] 豊橋技術科学大学 機械システム工学系 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)

[‡] 豊橋技術科学大学 機械システム工学専攻 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1)

添字

- e : 平衡状態
- f : 凍結状態
- g : 気相
- l : 液相
- 0 : 入口

1 緒 論

高速二相流ノズルは、二相流の運動エネルギーを利用する装置において重要な役割を果たす。たとえば、冷凍サイクルに適応される二相流エジェクタ[1]では、冷媒の膨張時に放出されるエンタルピー落差を二相流の運動エネルギーとして効率よく変換させなければならない。二相流の音速は、相変化を起すとき数 m になり[2], 相変化を起さない場合でも数十 m のオーダーであり、非常に低い。このような二相流は少し加速されるとすぐに超音速流のような振る舞いをする。二相流エジェクタや二相流タービンのような二相流の運動エネルギーを利用する機器の設計において、ノズルから二相流が噴出するときの挙動を詳しく知ることが重要となる。著者ら[3]はこれまでに冷凍サイクルのエジェクタを開発してきたが、ノズル背後に発生する膨張波の特性を知る必要があり、この特性をまず実験[4]で明らかにしてきた。この二相流膨張波は超音速の性質と亜音速の性質の両方を持ち備えていることを実験で示した。

また、二相流ノズル内の流れ特性は、これまで 1 次元流れを用いて理論的に研究[5,6]されてきた。高速二相流では、特に相間の運動量輸送が重要であり、各相の加速はその緩和時間に大きく依存することが示された。また、衝撃波管を用いた 1 次元気泡流の膨張波の研究[7]なども行われてきた。一方、2 次元圧縮性二相流の研究では、ミストの量が非常に少なく、流れが圧縮性気体に支配されている領域に関するもので、タービンプレード[8], 膨張波[9,10]に関する研究があるが、液体の量が少ないとして液体の運動量を見捨てるか小さい等の近似を行っている。また、気泡流領域での 2 次元二相流では翼回りの流れ[11]があるが、基礎式で気体の運動量等が見捨てられている。本研究の対象はクオリティが 0.1 から 0.5 程度の低クオリティのミスト流で、これらの近似が成立しない液体と気体の両方の性質が表れる二相流であり、この領域の 2 次元圧縮性二相流の研究はほとんどない。

そこで、本研究では相変化を起さず等温変化をすると仮定した高速ミスト流中の相間の運動量緩和現象に注目して理論解析を行い、運動量の緩和を伴う流れ場に発生する膨張波の流体力学的性質を明らかにする。

2 基 礎 式

相変化はエネルギー変換機器で非常に重要となるが、これまでの 1 次元二相流の研究[5]で運動量緩和現象が音速を大きく変えるため、圧縮性流体の特性に大きな影響を与えることが明らかにされてきた。本研究では、付加的な複雑さを避けるため、連続相が気相で分散相が液相(液滴)であるミスト流中に存在する運動量緩和現象のみを考慮し、2 次元流れの膨張現象について調べた。

気相と液相のそれぞれの質量保存を表す連続の式は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha \rho_g + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \rho_g v_{gi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha) \rho_l + \frac{\partial}{\partial x_i} (1-\alpha) \rho_l v_{li} = 0 \quad (2)$$

ここで、二相流中の気相の体積分率を表すボイド率を α 、密度を ρ 、流速(v_x, v_y)とおく。ただし、添え字 g および l はそれぞれ気相と液相を、 i は 2 次元の各方向を表す。

熱水タービンや冷凍機のエジェクタの二相流のクオリティは 0.1 のオーダーでミスト流の領域にある。液滴径が十分小さい場合、液滴にはストークス抵抗による相間の摩擦力が働く。この力を単位体積当たり働く液相の外力として書き表すと式(4)の右辺の第 1 項の形になる。ただし、緩和時間 τ は $\tau = \rho_l d^2 / (18 \mu_g)$ で液滴径と物性値で表される。気相には逆の力が働き、式(3)の右辺の第 1 項となる。したがって、気相と液相のそれぞれの運動量保存を表す運動量式は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha \rho_g \frac{\partial v_{gi}}{\partial t} + \alpha \rho_g v_{gj} \frac{\partial}{\partial x_j} v_{gi} \\ = -(1-\alpha) \rho_l \frac{v_{gi} - v_{li}}{\tau} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1-\alpha) \rho_l \frac{\partial v_{li}}{\partial t} + (1-\alpha) \rho_l v_{lj} \frac{\partial}{\partial x_j} v_{li} \\ = (1-\alpha) \rho_l \frac{v_{gi} - v_{li}}{\tau} - (1-\alpha) \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 p は圧力であり、これらの基礎式は代表的

な流体力学の数値解析の本[12]と同様のものである。

二相流のエネルギー式は各相の温度変化を求めるために必要となるが、本研究で対象とするクオリティが 0.1 程度のみスト流では液滴が大きな熱容量をもつことから気相はほぼ等温変化をするとみなせるため、温度一定の状態方程式を用いた。液体の圧縮性は気相のそれに対して小さく無視できるので、液相の密度 ρ_l は一定とした。また、緩和時間 τ は一般的には流れ場の関数となるが、本解析では大きく変化しないとして定数として扱った。

これらの基礎方程式は運動量緩和時間 τ によって特徴づけられる。すなわち、 τ が小さくなると相間の運動量輸送が活発になるため速度差が小さくなり、 $\tau \rightarrow 0$ となる極限では、相間の運動量輸送が平衡に達し速度差が無くなる平衡流となる。逆に、 τ が大きくなると相間の運動量輸送が疎になり各相間の影響力が少なくなり、 $\tau \rightarrow \infty$ となる極限では、相間の運動量輸送が無くなり各相が独立に流れる凍結流となる。凍結という用語は運動量輸送にふさわしくないが、緩和現象を扱うときに良く用いられるので、ここでも用いた。

基礎式(1)~(4)の微分項は、 $\tau \rightarrow \infty$ として得られる凍結流の基礎式とまったく同じである。すなわち、これらの方程式を支配する無次元数は、凍結流を支配する無次元数である凍結マッハ数となる。

3 音速

非定常基礎式(1)~(4)を線形化し、角周波数 ω の単色波がこれら式を満足する条件から微小擾乱の伝播速度が求まる。これを実行すると、この単色波の複素伝播数ベクトル (k_x, k_y) が満足しなければならない次の関係式が得られる。

$$\frac{\omega^2}{k_x^2 + k_y^2} = \frac{i \left(\frac{p}{\rho_l} \right) \{ (1-\alpha)\rho_g + \alpha\rho_l \} \omega\tau - \left(\frac{p}{\alpha} \right)}{i\alpha\rho_g\omega\tau - \{ \alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l \}} \quad (5)$$

土方ら[13]は 1 次元の二相流の音波の伝播速度を求めているが、本論文では、2 次元の問題を扱うため、 k_x と k_y が表れる。また、そこでは温度や相変化の緩和現象も扱われているが、ここでは運動量の緩和現象のみが考慮された。

式(5)において、 $\tau \rightarrow 0$ とすると平衡流の音速が得られる。

$$a_e = \sqrt{\frac{p\rho_g}{x} \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} \right)} = \sqrt{\frac{p}{\alpha(\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_l)}} \quad (6)$$

ここで、音速を a 、添え字 e は平衡状態であることを表す。

また、式(5)において、 $\tau \rightarrow \infty$ とすると凍結流の音速が得られる。

$$a_f = \sqrt{\frac{p\rho_g}{x} \left(\frac{x}{\rho_g^2} + \frac{1-x}{\rho_l^2} \right)} = \sqrt{\frac{p}{\rho_g} + \frac{p}{\rho_l} \frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (7)$$

ここで、添え字 f は凍結状態であることを表す。 $\rho_l \gg \rho_g$ であるので、凍結音速は気体の音速に等しく無次元音速 $a' = a/(p/\rho_g)^{1/2}$ はほぼ 1 になる。

式(5)から得られる微小擾乱の伝播速度、すなわち音速を無次元数 $\omega\tau$ を横軸にとって Fig. 1 に示す。式(5)は気体の等温音速の 2 乗 p/ρ_g で無次元化すれば、ボイド率 α と密度比 ρ_l/ρ_g がパラメータとなるが、以前われわれが行った熱水の実験ではクオリティが 0.1 で、密度比が 10^3 のオーダーであったのでこれから $x/(1-x) = \alpha\rho_g/\{(1-\alpha)\rho_l\}$ の関係を用いてこのパラメータを定めた。また、この図で縦軸は気体の等温音速

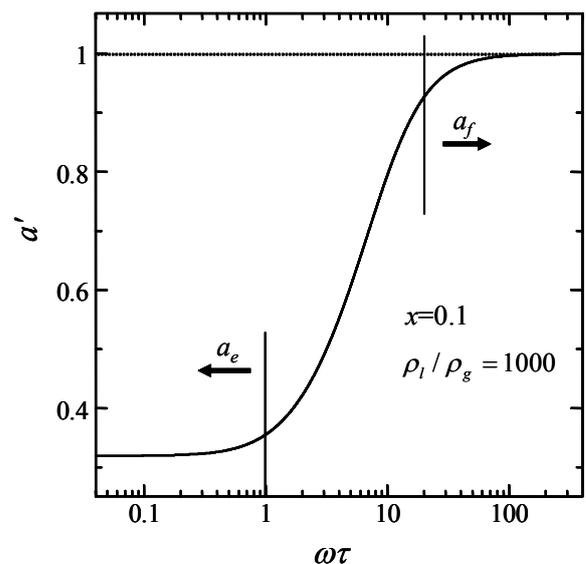


Fig. 1 Sound velocity of two-phase flow with momentum relaxation.

で無次元化されている. ωt が小さいときは平衡音速に, 大きいときは凍結音速に漸近する. この結果から, 音速は ωt が 1 より小さいときはほぼ平衡音速で, 20 より大きいときはほぼ凍結音速で表せる.

4 気体力学の膨張波との比較

本解析では, ノズル出口に発生する膨張波を理論的に調べるため, Fig. 2 に示すような形状で解析を行った. 上部はノズルの流れ方向の中心線に対応しているとして対称対象境界条件を与えた. 2次元ノズル出口高さの半分を代表長さ L にとり, ノズル出口の手前は長さ $(1/2)L$ だけノズル内部とし, ノズルを出た後の背圧室は $5L \times (9/2)L$ の大きさに計算が行われた. 下部および右側は自由流出の境界条件を与えた.

距離を L で, 圧力を入口圧力 p_0 で, 速度を入口の等温音速 $(p_0/\rho_{g0})^{1/2}$ で無次元化して計算が行われた. 計算はメッシュ間隔を $0.1L$ とし, CIP 法[14]を用いた非定常 2次元計算が行われた. 十分時間を経て波形が変わらなくなったところで, 定常解として結果を得た.

Fig. 2 には, この体系で計算された比熱比 γ が 1.4 である理想気体の膨張波の流線がプロットされている. ただし, 本論文では曲線間の質量流量が一定である曲線を流線と定義した. したがって, 定常流であるが圧縮性流体であるので接線は流速の方向を正確には示していない. 等温音速で無次元化された入口速度 $u_0' = u_0 / (p_0/\rho_{g0})^{1/2}$ は 1.5 である. この条件では

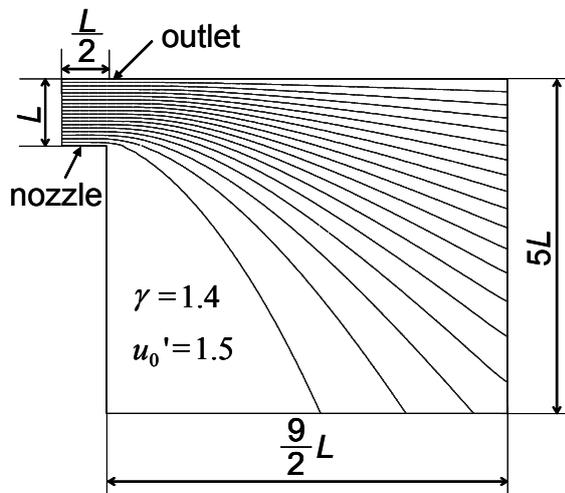


Fig. 2 Configurations of analyses. And Stream-line of rarefaction waves of an ideal gas.

入口のマッハ数 M_0 は 1.27 となる. 超音速流の場合, 下流の影響が上流に伝わらないのでノズル内の流線は変化しない. 超音速流れ場のマッハ角 $\sin^{-1}(1/M_0)$ は 52° になり, このマッハ角の膨張波の下流で減圧する. Fig. 3 には, このときの中心線に沿う圧力分布を実線でノズル出口からの距離 x に対して示した. マッハ角で示される斜め膨張波が到達した点から減圧し始める. 一方, 亜音速流の場合, ノズルから流出した後に速度が低下するので圧力は上昇する. Fig. 3 には同じ体系で計算された非圧縮性流体のポテンシャル流から得られる中心線に沿う圧力分布を破線で示す. ノズルから出た後に圧力が低下し流体が加速することは, 超音速流の特徴である.

次に, 二相流の場合の計算結果を Fig. 4~Fig. 6 に示す. 入口クオリティ x_0 を 0.1, 密度比 ρ_l/ρ_{g0} を 10^3 , 気体と液体の入口が同じであるとして入口無次元速度 u' を 0.5 とした計算結果である. 無次元緩和時間 $\tau' = \tau / \{L / (p_0/\rho_{g0})^{1/2}\}$ は, それぞれ 0.01, 0.1, 1.0 とした. 図中, 青線で気体の流線を, 赤線で液体の流線を示す. これらの流線は前述のように各相の質量流量を示すものである. 前節で述べたように本解析で用いた基礎式を支配する音速は凍結音速で, ほぼ気体の等温音速に等しい. 入口速度がこの音速の半分であるにもかかわらず, 超音速流れが達成されている. このことは, 緩和時間が小さい場合, 流れは平衡流に近いので平衡音速のマッハ数が 1 より大きければ, 支配方程式から見れば亜音速であるにもかかわらず超音速の振る舞いをするを解釈できる. 本解析でも

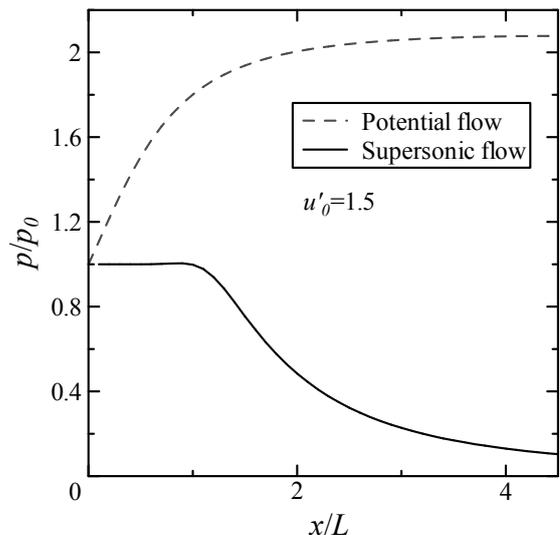


Fig. 3 Pressure profiles of a supersonic and incompressible potential flow along the center axis of the nozzle.

平衡音速より小さい入口速度で膨張する解は得られなかった。したがって、二相流膨張波の特徴は、凍結音速のマッハ数が亜音速でも超音速の形態を示すことである。

Fig. 7は、Fig. 4~6のノズル中心線上の圧力分布をノズル出口からの距離 x をとって示したものである。ノズル出口の角から出る膨張波が始めてノズルの中心線まで到達する位置は、入口流速が同じであるのに緩和時間が増加すると上流側に移動する。す

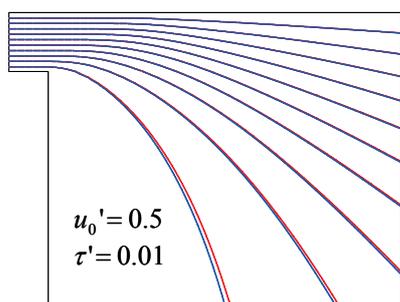


Fig. 4 Stream-lines of rarefaction waves of two-phase flow with relaxation time $\tau'=0.01$ relaxation.

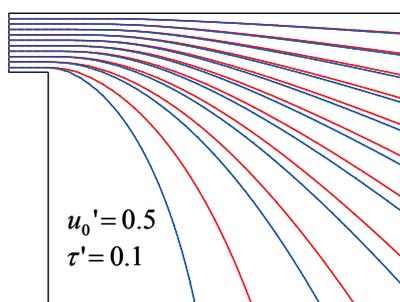


Fig. 5 Stream-lines of rarefaction waves of two-phase flow with relaxation time $\tau'=0.1$ relaxation.

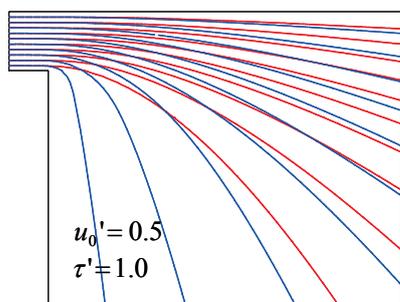


Fig. 6 Stream-lines of rarefaction waves of two-phase flow with relaxation time $\tau'=1.0$ relaxation.

なわち、緩和時間の増加によってマッハ数が減少するような形態を示す。緩和時間への依存性については次節で詳しく述べる。また、緩和時間はミスト径の2乗に比例しているの、緩和時間が大きいことは液滴径が大きいことを意味している。Fig. 4からFig. 6になるに従い、ミストの慣性力が増加するため、液体の流線の曲率半径は大きくなる。二相流膨張波のもう1つの特徴は緩和時間によって流れの状態が大きく変わることである。

5 膨張開始点の緩和時間への依存性

膨張波が発生し始める条件は前述のように緩和時間に依存し、このような高速二相流流れの形態を大きく左右する。ノズルの中心線に沿う減圧特性として現れる膨張波の開始点はマッハ数が大きいとき気体力学では変曲点となって現れるが、二相流膨張波では滑らかに変化する。たとえばFig. 8の実線は入口速度 $u_0'=0.9$ 、緩和時間 $\tau'=0.1$ の場合のノズル中心線上の無次元圧力 p/p_0 をノズル出口からの距離 x/L の関数として表したものである。本研究ではFig. 8のように、50%膨張した点で膨張曲線を近似する2次曲線(図中に点線で表す)が $p/p_0=1$ の線と交わる点を膨張開始点と定めた。厳密な意味での膨張開始点ではなく、膨張曲線の大きな変化が仮想的に起こり始める点とした。

ノズル出口の角から出る二相流の膨張波も、気体力学の膨張波から類推できるように、膨張波に流入

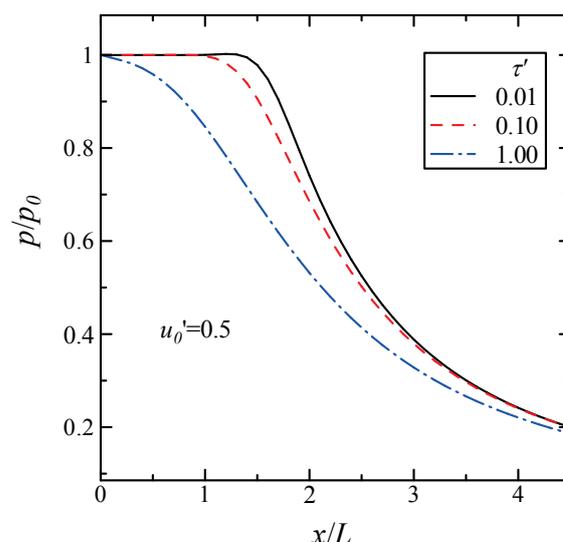


Fig. 7 Pressure profiles along center axis for the various relaxation time.

する速度，すなわち流入速度の膨張波の波面に垂直な成分が音速となる性質を持っていると考えられる．そうすれば，上で求めた膨張開始点とノズルの角に引いた直線（膨張波）が流れ方向となす角 θ はマッハ角 ($\sin\theta=1/M_0$) となるので，入口流速を用いると開始点から流れの音速を計算することができる．Fig. 9 は膨張開始点から計算される音速 a を Fig. 1 と同様に $\omega\tau$ を横軸にとって示したものである．ここで，波の角周波数 ω として，代表長さであるノズル幅 L と代表速度となる入口速度 u_0 から $2\pi u_0/L$ が用いられた．図中のそれぞれの記号は無次元緩和時間 τ' をパラメータにとってある．求められる音速は緩和時間

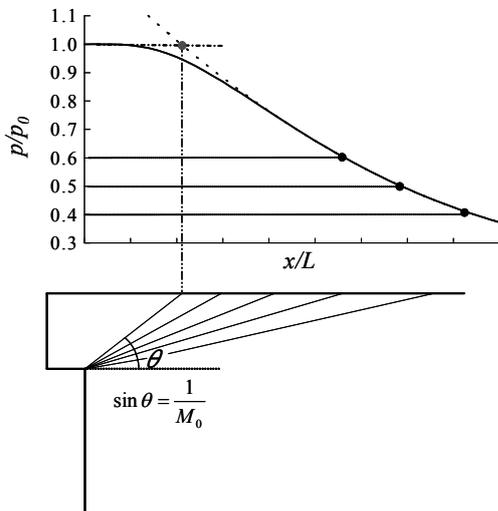


Fig. 8 Calculation method of sound velocity using Mach angle.

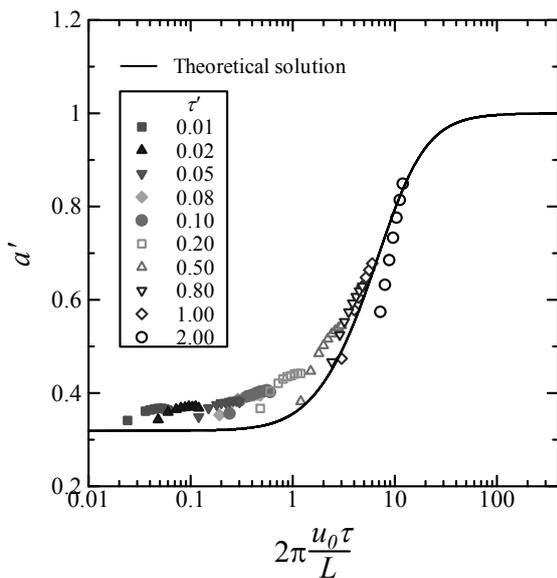


Fig. 9 Sound velocities obtained from Mach angle for the various relaxation time.

に大きく依存し緩和時間が小さいとき，平衡音速に近く，大きくなるにしたがい，徐々に凍結音速へと変化していく．入口流速の依存性も，入口速度が大きいほうが音速が速くなることを表している．

緩和時間の小さい場合は，ほぼ3節で求めた音速と一致するが，無次元緩和時間が2以上で，この整理方法との一致が悪くなる．これは，緩和時間が大きい場合，液体の慣性力のため液体は曲がらずほとんど膨張しないため，液相の流れから出たときに膨張することと，緩和時間の大きな流れ場では気液の速度差が大きく，気液間の速度差による内部損失と圧力が減少するので，圧力波形から直接音速を予測することは難しいためであると考えられる．

6 二相流膨張波の減圧特性

気体力学において，半無限流体中にある角を回る流れはプラントル・マイヤーの膨張波として知られている．長さの次元が消えるので，膨張時の圧力は角の回り角だけの関数として表される．本解析でも，膨張特性を明らかにするため，膨張時の圧力とノズルの出口の角からの角度の関係を調べた．

比較のため，気体の圧縮性のみを考慮した平衡二相流の膨張波の関係式を示す．気体の速度と液体の速度が等しく，気体の密度のみが圧力に比例すると仮定して導いた．速度が速度ポテンシャル $\phi=r f(\theta)$ で表せるとき， $r-\theta$ 座標の二相流の連続の式と運動量の式から

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right) \quad (8)$$

の関係が得られる．ここで， ρ は気体の平均密度 $\alpha\rho_g+(1-\alpha)\rho_l$ である．式(8)は，文献[4]の式(5)と同じものであり，膨張波の波面に垂直な θ 方向の速度が音速になるということを意味している．その導出方法は，たとえば[15]に示されている．ポテンシャル流れのとき，平衡二相流の運動量方程式は積分でき，

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i^2 + \frac{p + K \log p}{K(\rho_{g0}/\rho_0) + \rho_l} \right\} = 0 \quad (9)$$

の形になり括弧の中が保存される．ここで，二相流の連続の式(1)，(2)と状態方程式から

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\alpha p}{1-\alpha} \right) = 0 \quad (10)$$

が得られ，括弧の中が流線に沿って保存されること

が用いられた。 $ap/(1-a)$ は定数となるのでこれを K とした。 (8)式の右辺の音速の2乗は

$$\left(\frac{dp}{d\rho}\right) = \frac{(p+K)^2}{K\{K(\rho_{g0}/p_0) + \rho_l\}} \quad (11)$$

と書かれ $(p+K)$ の関数となる。 (9)式は

$$\frac{f^2}{2} + \frac{(p+K)^2/(2K) + p + K \log p}{K \rho_{g0}/p_0 + \rho_l} = const. \quad (12)$$

となり p が f だけの関数で表せるので微分方程式(8)は解くことができ、圧力が角度 θ の関数として求められる。式(9), (10), (11)の導出は付録に示されている。 [4]では、相変化がある場合の関係式が示されているが、ここで得られた関係は相変化は起こらない

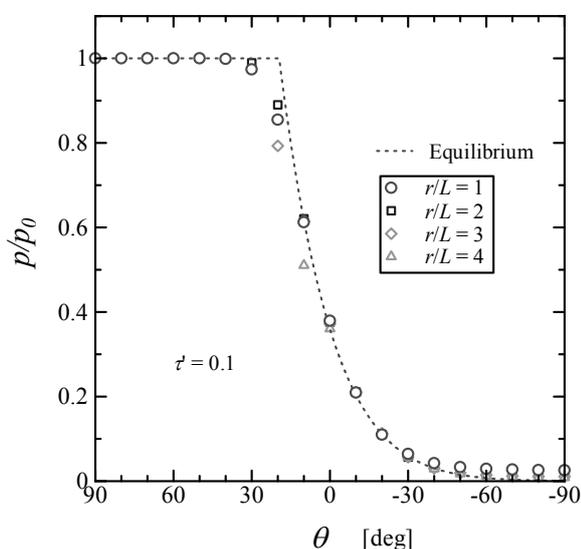


Fig. 10 Expansion curves versus the rotational angle for a small relaxation time.

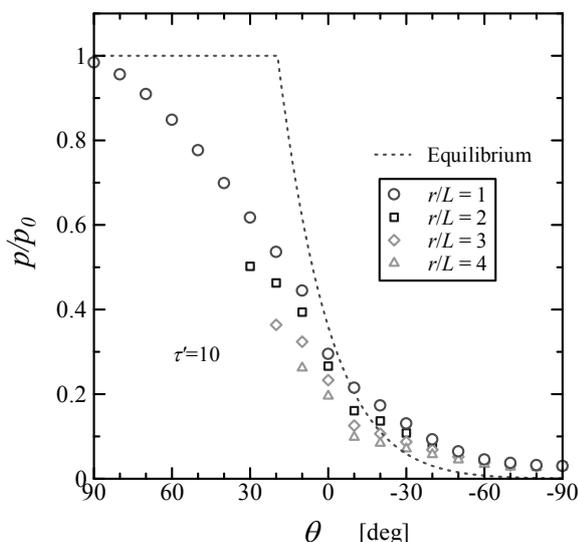


Fig. 11 Expansion curves versus the rotational angle for a large relaxation time.

等温変化のものである。

ノズル出口の角からの距離を r 、ノズル壁の水平線からの角度を θ として、無次元緩和時間 τ が 0.1、無次元入口流速 u_0 が 0.96 の解析結果の圧力を θ の関数として Fig. 10 にプロットする。各記号は図中に記されたそれぞれの半径である。点線は上で求めた平衡二相流のプラントル・マイヤーの膨張曲線である。両者はよく一致し、無次元緩和時間が 0.1 より小さいときは平衡理論の膨張曲線で表される。

Fig. 11 に無次元緩和時間が 10 の場合の結果を示す。圧力の減衰が大きく、平衡理論から離れている。また、角からの距離 r が大きいほど圧力が下がっており、角度 θ の関数で表すことができない。無次元緩和時間が大きいとき相間の速度差が大きくなるので気体と液体間の摩擦が大きくなり、結果として二相流の内部摩擦が増加し、このために圧力が減衰していると考えられる。

7 沸騰水の膨張波の実験結果との比較

これまでに、熱水の二相流ノズル出口に発生する膨張波を調べる実験[4]を行ってきた。本解析は相変化を考慮していないので直接比較することはできないが、二相流膨張波の2次元の特徴を比べることができる。 Fig. 12 は横軸にノズル出口からの距離をとって、ノズルの中心軸に沿う圧力分布を示したものである。ノズル入口温度は 130 °C で、各記号は質量流量を変えたときの圧力分布であるが、図中にはノズルのど部の流路断面積で割った質量フラックスの形で数値が示されている。図中の各線は気体と液体の温度と速度が等しい平衡状態で膨張するとしたときの理論膨張曲線である。その理論計算ではノズル内も平衡状態にあるとしてノズル出口の圧力が実験値と同じ値になるまで膨張したと仮定している。実験値と平衡理論の膨張波の理論の大きな差は、理論値にはノズルの角から出る膨張波がはじめて中心線まで達する間フラットな圧力部が存在することであり、実験値にはこれが無い。また、理論膨張曲線は常に曲率が正の凹状をしているが、実験値の膨張曲線は始め曲率が負の凸状で後半が凹状をしている。

Fig. 13 に、Fig. 12 と同じ条件である入口速度無次元緩和時間 τ を 10 としたときの中心線に沿う圧力分布をノズル出口からの距離 x をとって実線で示す。この高速二相流の液滴径を 10 μm のオーダーとすれば緩和時間は 1 ms のオーダーとなり、無次元緩和時

間は 10 のオーダーと考えられる。図中の点線は前節で示した平衡理論から得られる膨張波による理論膨張曲線である。Fig. 11 では角度 θ で表したがこれを x で展開した曲線である。平衡理論では膨張波が到達するまでにフラットな圧力部が存在するが、本解析結果にはそれが無く、Fig. 12 で示す実験値に近い。緩和時間の大きな二相流では気液の速度差が大きく、その内部損失によって圧力は減少し、フラットな部分は消滅したことを本解析が示している。また、解析結果の膨張曲線の曲率の変化も実験値と同じ傾向を示している。

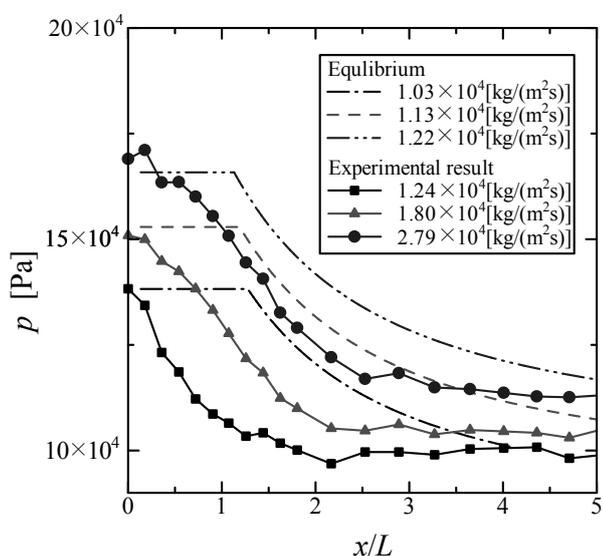


Fig. 12 Experimental expansion curves along the center axis of the nozzle.

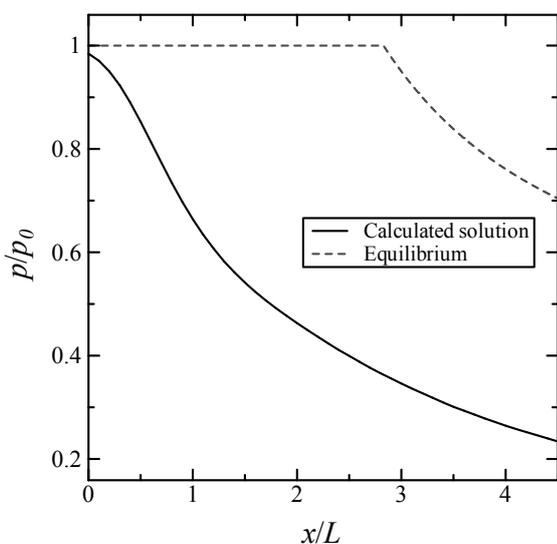


Fig. 13 Calculated expansion curves along the center axis of the nozzle.

8 結論

ノズル出口に発生する二相流膨張波を理論的に調べるため、相間の運動量輸送を考慮した圧縮性二相流の基礎式を導き、これを数値解析することにより二相流膨張波の特性を求め、以下の結論を得た。

1. 非定常基礎式から微小擾乱の伝播速度が求められた。この音速は緩和時間と波の角周波数の積に依存し、これが小さいとき運動量輸送が平衡状態にある平衡音速に、大きいときは凍結状態にある凍結音速に近づく。

2. 二相流膨張波は基礎式の支配音速である凍結音速が 1 よりも小さい入口条件でも、緩和時間が小さいとき存在しうることを明らかにした。

3. 高速二相流に現れる最初の膨張波のマッハ角は緩和時間と波の角周波数の積 $\omega\tau$ の関数で与えられる音速から求められる。ただし、波の角周波数には二相流の入口速度 u_0 とノズル出口の半値幅 L から得られる $2\pi u_0/L$ をとる必要がある。

4. 緩和時間が小さいとき、圧力変化はほぼノズル出口の角からの角度で表され、平衡理論に近い。無次元緩和時間が 1 より大きくなると相間の運動量交換による内部摩擦が増加し、圧力は流れ方向に減衰するため、この角度だけでは表されない。

5. 実験で得られる熱水の二相流ノズル出口の二相流の無次元緩和時間はほぼ 10 程度であるが、この条件で得られた本解析結果の膨張曲線の形状は実験値の膨張曲線と類似している。

参考文献

- [1] 中川, "二相流エジェクタ", 冷凍, **79**-925 (2004), 856.
- [2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics (1959), 422, Pergamon Press.
- [3] 中川, 他 3 名, "管内高速ミスト噴流の混合性能に関する研究", 日本機械学会論文集, **60**-575, B (1994), 2552.
- [4] 中川, 他 2 名, "超音速二相流ノズル出口に発生する膨張波に関する研究", Therm. Sci. Eng., **14**-4 (2006), 67.
- [5] 中川, 杉浦, "速度緩和現象によって発生する高速ミスト流中の衝撃波", 日本機械学会論文集, **66**-645, B (2000), 1495.
- [6] 杉浦, 中川, "ノズル内の亜音速ミスト流中に発生する速度緩和および温度緩和を伴う衝撃波", 日本機械学会論文集, **67**-622, B (2001), 2462.
- [7] 中川, 間宮, "蒸発を伴う気ほう流中の膨張波",

- 日本機械学会論文集, 52-474, B (1986), 650.
- [8] J.B.Young, "Two-Dimensional, Nonequilibrium, Wet-Steam Calculations for Nozzles and Turbine Cascades," *Trans. ASME J. Turbomach.*, **114** (1992), 569-579.
- [9] Marble, F.E., "Dynamics of a gas containing small solid particles," *Proc. 5th AGARD Combustion* (1963), 175-215.
- [10] 森岡, 他 7 名, 混相流体の力学 (1991), 133, 朝倉書店.
- [11] 松本, 西川, 大橋, "二相流における翼列計算 (第 1 報, モデル化と数値計算)", *日本機械学会論文集*, **86-1412**, B (1987), 3210.
- [12] 保原・大宮, 数値流体力学 (1992), 326, 東京大学出版.
- [13] 土方・他 2 名, *日本機械学会論文集*, 37-295, B (1971), 556.
- [14] 矢部・観山・椋島, パソコンによるシミュレーション物理 (1992), 138, 朝倉出版
- [15] 森, 土方, 「熱と流れの工学 II」 (1977), 40, 共立出版.

付録 平衡流の関係式 (9), (10), (11) の導出

定常の平衡流の基礎式は, 基礎式(1), (2), (3)+(4)において, 非定常項を消し $v_g = v_l = v$ とすることによって得られ, 次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \alpha p v_j = v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha p + \alpha p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (1-\alpha) v_j = -v_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} + (1-\alpha) \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A2})$$

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{A3})$$

式(A1), (A2)から $\partial v_j / \partial x_j$ を消去することによって式(10)が得られる.

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\alpha p}{1-\alpha} \right) = 0 \quad (10)$$

式(10)は, $\alpha p / (1-\alpha)$ が流体粒子に沿って保存されることを表している. さらに, プラントル・マイヤーの流れのように入口条件が一樣な場合, 流れ場全体で保存されることになり, これを K とした.

$$\frac{\alpha p}{1-\alpha} = K = \text{const.} \quad (\text{A4})$$

平衡二相流の平均密度はこの定数 K を用いて圧力だけの関数として次のように表すことができる.

$$\rho = \frac{K}{p+K} \frac{\rho_{g0} p}{p_0} + \frac{p}{p+K} \rho_l \quad (\text{A5})$$

これを用いると式(A3)の右辺は次のようになる.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= -\frac{(p+k)/p}{K(\rho_{g0}/p_0) + \rho_l} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &= -\frac{1}{K(\rho_{g0}/p_0) + \rho_l} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + K \log p) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

また, 二相流全体の運動量の式(A3)の右辺は, ポテンシャル流の場合には $\text{rot}(\mathbf{v})=0$ なるので

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_j^2}{2} \right) \quad (\text{A7})$$

したがって, 式(A3)は積分できる形になり,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{v_i^2}{2} + \frac{p + K \log p}{K(\rho_{g0}/p_0) + \rho_l} \right\} = 0 \quad (9)$$

式(9)が得られる. この式は単相流のベルヌーイの式に対応し, かつこ内が流れ場全体で一定となる.

音速の 2 乗も式(A5)の関係から

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) &= \frac{\partial p}{\partial \left\{ \left(\frac{p}{p+K} \right) \left(K \frac{\rho_{g0}}{p_0} + \rho_l \right) \right\}} \\ &= \frac{(p+K)^2}{K \{ K(\rho_{g0}/p_0) + \rho_l \}} \end{aligned} \quad (11)$$

となり, 式(11)が得られる.