

粒子法とグリッド法の結合によるマルチスケール気液界面解析*

石井 英二[†] 石川 亨[‡] 田辺 好之[‡]

Simulation of Multi-Scale Free Surfaces within Gas-Liquid flows using Combined Particle and Grid Methods

Eiji ISHII,[†] Toru ISHIKAWA[‡] and Yoshiyuki TANABE[‡]

Abstract

Gas-liquid flows usually include multi-scale free surfaces, for example, fuel sprays used for automobile engines become liquid films at the outlet of fuel injectors, and then the liquid films break up into droplets. Fluid flow with free surfaces, like the liquid films, are mainly simulated using grid methods, where the front of the free surface is directly captured on regular, fixed grids that cover both liquid and gas domains. In these methods, however, free surfaces are sometimes lost due to numerical diffusion in case the scale of the free surfaces becomes smaller than the grid size. Particle methods can avoid the occurrence of such the unreal loss of free surfaces. The particle methods treat the free surfaces as groups of particles that move in a pattern based on a Lagrangian description. To simulate the multi-scale free surfaces, we have developed a hybrid particle/grid method where the free surfaces within a sub-grid region are simulated with particles located near the liquid interfaces. Velocities determined using the particle method are combined with those obtained from the grid method. However, the interaction between gas and liquid still depends on the grid size because the gas regions within the sub-grid regions were calculated by the grid method. Accordingly, the present method adopts a two-particle model as the particle method; that is, the free surfaces within the sub-grid region are simulated with two types of particles, one for the gas and the other for the liquid. The sub-grid regions are determined by using the volume fraction of liquid calculated using the grid method, and then the two-particle model is applied to the sub-grid regions. We will verify the new method by applying it to prediction of large deformation in free surfaces (the Rayleigh-Taylor instability) and to the fragmentation of a water column. The predicted deformed shape of the water column shows good agreement with measurements reported by Koshizuka et al.

Key Words: *Computational fluid dynamics, Multi-phase flow, Multi-scale, Hybrid method*

記号		w	:	MPS法の重み関数		
C	:	音速		W	:	補間で用いる重み関数
		[m/s]		μ	:	粘性係数
d	:	空間の次元数				[Pa·s]
				θ	:	液相の体積分率
g	:	重力加速度		ρ	:	密度
		[m/s ²]				[kg/m ³]
n	:	粒子数密度		τ	:	粘性応力
						[N/m ²]
p	:	圧力		添字		
		[Pa]		CIP	:	CIP法
r	:	粒子間距離		MPS	:	MPS法
		[m]				
R	:	補間領域の半径				
		[m]				
t	:	時間				
		[s]				
u	:	速度				
		[m/s]				

* 受理日: 2006年3月23日, 担当エディター: 黒田 明慈

[†] 株式会社 日立製作所 機械研究所 (〒312-0034 茨城県ひたちなか市堀口 832 番地 2)

[‡] 株式会社 日立製作所 オートモーティブシステムグループ (〒312-8503 茨城県ひたちなか市高場 2520 番地)

1 緒言

工業的に利用される気液二相流の多くは、マイクロとマクロの気液界面が混在するマルチスケールの流動現象である。例えば自動車エンジン内に燃料を噴霧する自動車用インジェクタでは、噴孔出口に液膜状のマクロ界面が形成され、それが界面不安定性や周囲ガス流動による巻き込みにより液滴状のマイクロ界面へと形態を変える。このような燃料噴霧の分裂挙動はエンジン内の燃焼に影響を及ぼすことがわかっている。そして近年の自動車エンジンの低排気化・低燃費化の流れに伴い、燃料噴霧の分裂挙動解析の必要性が増加してきている。そこで本研究では、燃料噴霧の分裂挙動解析技術構築の第一ステップとして、マルチスケール界面挙動の解析技術について検討を行った。

従来、気液界面挙動の計算では界面追跡法のように固定された計算格子により界面移動を計算する手法が主に用いられてきた。界面追跡法としては Volume of fluid (VOF)法[1]、Level set 法[2]、Cubic interpolated propagation (CIP)法[3]等があり多くの成果を挙げている。しかしこれらの手法では、界面サイズが計算格子サイズに近くなると、数値拡散により界面が消失してしまう問題がある。一方、数値拡散による界面消失のない解析手法として、Moving particle semi-implicit (MPS)法[4] や Smooth particle hydrodynamic 法[5]のような粒子法がある。これらの手法では、計算格子の代わりに空間に配置した粒子を Lagrange 的に移動するので、数値拡散による界面消失が無いのが特徴である。しかし自動車用インジェクタの内部から大気領域までを粒子法で計算するためには、粒子数が膨大となり計算負荷が大きくなる問題がある。

上記の界面追跡法と粒子法の問題に対して、界面追跡法と粒子法を結合し、計算の効率化を図った手法がある。Liuら[6]はMPS法に差分格子を併用した。また Enrightら[7]の Hybrid particle level set 法では、気液界面に散布したマーカー粒子を Lagrange 的に用いることで、数値拡散による界面の消失が少ない高精度な解析を実現している。これらの解析手法は気相と液相（もしくは固相）のどちらかを粒子法で置き換えるか、または粒子自体はマーカーとしてのみ使用するため、粒子サイズ（粒子間距離）は計算格子サイズと同程度であり、マルチスケールの界面に対応するために十分とはいえない。

我々は以前に、マルチスケールの気液界面挙動を解析するために、界面追跡法の CIP 法と粒子法の MPS 法を結合した解析手法を開発した[8]。ここでは界面近傍のみに粒子法を適用し、他の領域を CIP 法で解析することで、計算負荷の小さい効率的な解析手法を構築した。また CIP 法が工業製品の複雑形状に対応できるように、非構造格子に対応できる形式に改良を行った[9]。これにより自動車用スワールインジェクタの燃料噴霧の液膜がリング状に分裂する挙動を定性的に再現することが可能となった[10]。しかし本手法は MPS 法の計算において、(気相と液相の両方ではなく)液相のみに粒子法を適用したため、気液間の相互作用を十分に計算できない場合があった。例えば Rayleigh-Taylor 不安定問題では液相の沈降挙動を正確に再現できないケースがあった。そこで本研究では界面近傍に気相用と液相用の二種類の粒子を配置することで、気液間の相互作用を高精度に計算することを試みた。そして解析手法の検証の第一ステップとして、本解析手法（これより Hybrid 法と呼ぶ）を基礎的な流れ場 (Rayleigh-Taylor 不安定問題とダム崩壊問題) に適用した結果について述べる。

2 解析手法

図1に Hybrid 法のコンセプトを示す。計算格子よりも大きな界面挙動は主に CIP 法で計算し、計算格子よりも小さな界面挙動は主に MPS 法で計算を行う。

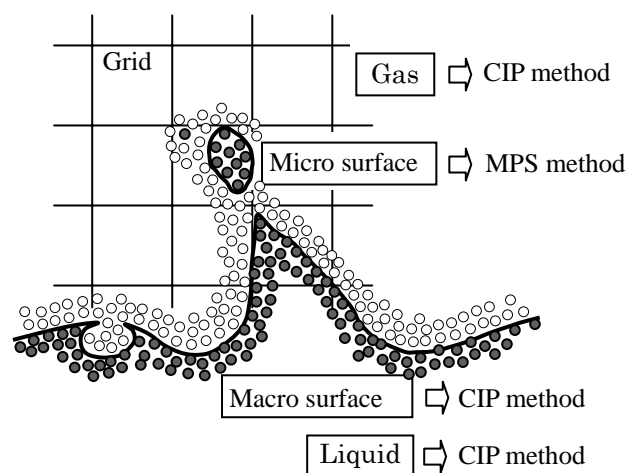


Fig. 1 Assignment of CIP and MPS methods in gas-liquid flows

MPS法の粒子は界面近傍のみに配置される。界面近傍以外の領域は計算格子を利用してCIP法で計算する。以下ではMPS法とCIP法について簡単に説明した後、MPS法とCIP法の結合方法について説明する。

2.1 Moving Particle Semi-implicit (MPS)法[4]

非圧縮性と運動量の式は次式で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (2)$$

ここで u は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘度を示す。表面張力は無視した。式(2)左辺はLagrange的な粒子の扱いを示す。式(2)のラプラシアンオペレーターは次式で計算する。

$$(\nabla^2 \phi)_i = \frac{2d}{\lambda n_0} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) w(|r_j - r_i|) \quad (3)$$

ここで ϕ_i は物理変数、 r_i は粒子座標、 d は次元数、 n_0 は基準となる粒子数密度を示す。 w は重み関数であり次式で定義される。

$$w(r_{ij}) = \begin{cases} \frac{r_e - r_{ij}}{r_e} & (r_{ij} \leq r_e) \\ 0 & (r_{ij} > r_e) \end{cases} \quad (4)$$

ここで r_{ij} は粒子間距離、 r_e は粒子間の影響範囲を示す。粒子数密度 n_i と変数 λ は次式で定義する。

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|) \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} |r_j - r_i|^2 w(|r_j - r_i|)}{\sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|)} \quad (6)$$

まず式(2)の粘性力と体積力を求め、粒子をLagrange的に移動させる。次に式(1)の非圧縮条件を満足するように次の圧力Poisson方程式を解く。

$$(\nabla^2 p)_i = \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i - n_0}{n_0} \quad (7)$$

式(7)で得られた圧力を用いて、速度と粒子座標は次式で修正される。

$$\delta \bar{u}_i = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \quad (8)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^* + \delta \bar{u}_i \quad (9)$$

$$\bar{r}_i^{n+1} = \bar{r}_i^* + \Delta t \delta \bar{u}_i \quad (10)$$

ただし、

$$(\nabla p)_i = \frac{d}{n_0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{p_j - p_i}{|r_j - r_i|^2} (r_j - r_i) w(|r_j - r_i|) \right] \quad (11)$$

ここで記号*は粒子移動後の値を示す。

2.2 Cubic Interpolated Propagation (CIP)法[3]

流れの支配方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_j f_{,j} = g \quad (12)$$

$$f = \begin{pmatrix} F \\ \rho \\ u_i \\ p \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho u_{j,j} \\ -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} \\ -\rho C_s^2 u_{j,j} \end{pmatrix} \quad (13)$$

τ は粘性応力、 C_s は音速を表す。表面張力は無視した。 F は液相の体積分率 θ_{CIP} を用いて次式で定義される。

$$\theta_{CIP} = \frac{\arctan(F)}{0.99\pi} + 0.5 \quad (14)$$

θ_{CIP} は気相で0、液相で1の値をとる。密度、粘度、音速は次式で求める。

$$\rho = \rho_l \theta_{CIP} + \rho_g (1 - \theta_{CIP}) \quad (15)$$

$$\mu = \mu_l \theta_{CIP} + \mu_g (1 - \theta_{CIP}) \quad (16)$$

$$C_s = C_{sl} \theta_{CIP} + C_{sg} (1 - \theta_{CIP}) \quad (17)$$

ここで添え字の l と g は液相と気相での物性値を示す。式(12)は次式のように移流方程式と非移流方程式に分割して計算される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_j f_{,j} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g \quad (19)$$

CIP法では式(18)を解く際、3次スプライン補間を用いることで、3次精度で移流方程式を解くことが可能である。式(18)を計算した後、式(19)を有限体積法で離散化し、fractional-step法で時間積分した。

2.3 MPS/CIP hybrid 法

MPS 法と CIP 法の結合方法を以下に示す.

- ① MPS 法と CIP 法で別々に移流項を計算して移流速度を求める.
- ② MPS 法で使用する粒子の粒子濃度と, CIP 法で求めた気液界面からの距離を変数とする重み関数で, 各々の移流速度を修正する.
- ③ 最後に圧力ポアソン式を用いて (MPS 法と CIP 法で別々に) 圧力を計算する.

MPS 法と CIP 法の通常の解析手順に, 上記②の移流速度の修正を加えたのみのシンプルな解析手法である. 移流速度の修正は次式で行う.

$$\vec{u}_{MPS}^* = (1 - \lambda_{MPS}) \vec{u}_{MPS} + \lambda_{MPS} \vec{u}_{(CIP)} \quad (20)$$

$$\vec{u}_{CIP}^* = (1 - \lambda_{CIP}) \vec{u}_{(MPS)} + \lambda_{CIP} \vec{u}_{CIP} \quad (21)$$

ここで u_{MPS} は MPS 法で計算した (粒子座標上の) 移流速度, u_{CIP} は CIP 法で計算した (グリッド座標上の) 移流速度, $u_{(CIP)}$ は u_{CIP} の粒子座標上への補間値, $u_{(MPS)}$ は u_{MPS} のグリッド座標上への補間値を表す. それぞれの補間は次式で行う (図 2 参照).

$$\vec{u}_{(MPS)} = \frac{\sum_{i \neq j} \vec{u}_{MPS} W(R_{ij})}{\sum_{i \neq j} W(R_{ij})} \quad (22)$$

$$\vec{u}_{(CIP)} = \frac{\sum_{i \neq j} \vec{u}_{CIP} W(R_{ij})}{\sum_{i \neq j} W(R_{ij})} \quad (23)$$

$$\text{ただし, } W(R_{ij}) = \begin{cases} \frac{R_e}{R_{ij}} - 1 & (R_{ij} \leq R_e) \\ 0 & (R_{ij} > R_e) \end{cases} \quad (24)$$

ここで R_e は有効半径 (1.0~1.5 格子分), R_{ij} は粒子座標とメッシュ座標の距離. 一方, 重み関数は次式となる.

$$\lambda_{MPS} = \begin{cases} 0 & (\delta^{(i)} < \delta_{\min}^{(i)}) \\ (\delta^{(i)} - \delta_{\min}^{(i)}) / (\delta_{\max}^{(i)} - \delta_{\min}^{(i)}) & (\delta_{\min}^{(i)} \leq \delta^{(i)} \leq \delta_{\max}^{(i)}) \\ 1 & (\delta^{(i)} > \delta_{\max}^{(i)}) \end{cases} \quad (25)$$

$$\lambda_{CIP} = \lambda_{MPS} (1 - \beta) \quad (26)$$

$$\text{ただし, } \beta = \theta_{CIP} \beta^{(1)} + (1 - \theta_{CIP}) \beta^{(2)} \quad (27)$$

図 3 は解析モデルであり, $\delta^{(i)}$ ($i=1, 2$) は流体 1 と流

体 2 の界面からのメッシュ数 (距離) で定義し, 矢印方向を正とした. また基準位置は CIP 法で求める密度関数 θ (流体 1 で 0, 流体 2 で 1) が 0.5 の位置で, $\delta^{(i)}$ をゼロとした. 粒子の移流速度は, 界面近傍 (δ が $0 \sim \delta_{\min}$) では粒子法で計算し, 他の領域 (δ が δ_{\max} 以上) では CIP 法で計算した. ただし, δ が $\delta_{\min} \sim \delta_{\max}$ の領域は MPS 法と CIP 法の結合領域とした. また粒子の散布範囲は, δ が $0 \sim 3$ (界面から 3 メッシュの範囲) とし, δ_{\min} は 0.4, δ_{\max} は 0.5 として界面近傍の約 1 メッシュ分を MPS 法の計算に割当てた. CIP 法での界面消失を MPS 法で補うという目的から δ_{\max} は 0.5 から 1.0 程度が望ましく, これより大きいと界面挙動が平均化されて鈍った傾向を示す. また粒子濃度 β は次式で定義した.

$$\beta = \sum_{i \neq j} W(R_{ij}) / N_0 \quad (28)$$

ここで N_0 は基準の粒子数密度である.

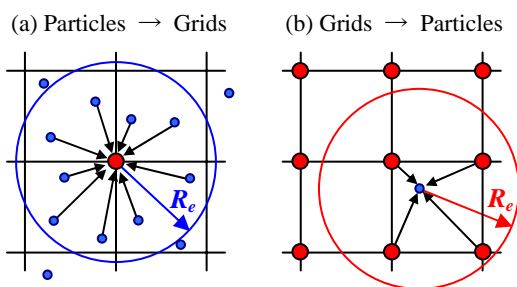


Fig. 2 Interpolation between particle and grid coordinates

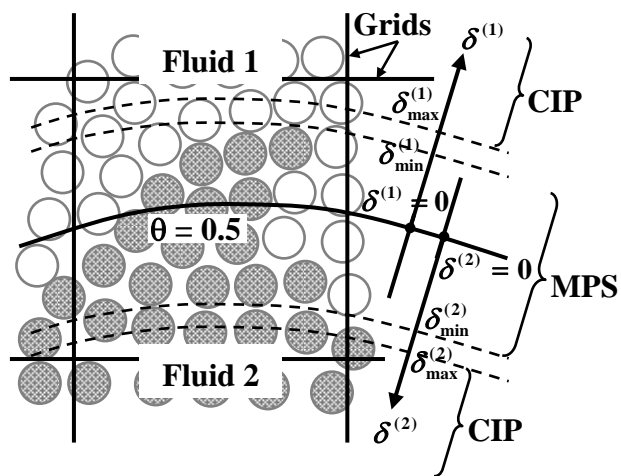


Fig. 3 Computational model

3 計算結果

3.1 Rayleigh-Taylor 不安定問題

解析手法の定性的妥当性を確認するため、Hybrid 法を Rayleigh-Taylor 不安定問題に適用した。Rayleigh-Taylor 不安定とは、軽い流体の上に重い流体が存在する場合に起こる界面の不安定現象である。計算の初期条件を図 4 に示す。軽い流体を領域の下側 2/3 に、重い流体を上側 1/3 に配置し、界面の初期振幅を 0.1 とした。軽い流体と重い流体の密度比は 1 : 4、動粘度は共に 0.01、重力加速度は 10 とした。計算領域の幅は 1、高さを 3 とし、外周は壁面とした。計算格子は 60×180 (格子間隔は 0.017)、初期粒子間距離は 0.005 として界面近傍に MPS 法用の粒子を発生させた。重い流体用の粒子は、CIP 法で計算した液相率が 0.5 の位置から重い流体側に 3 メッシュの範囲で発生させた。この 3 メッシュより外の重い流体領域に進入した重い流体用の粒子は削除した。軽い流体用の粒子は軽い流体側 3 メッシュの範囲で発生させた。また軽い流体中で重い流体用の粒子の濃度が上昇した場合には、その周囲に軽い流体用の粒子を発生させた。

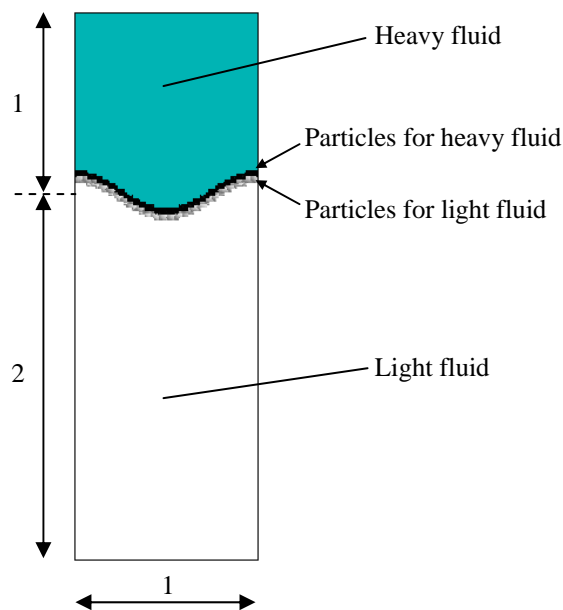


Fig. 4 Initial arrangement of light and heavy fluids

(a) Hybrid method

(b) CIP method only

(c) CIP method only

60×180 grids

120×360 grids

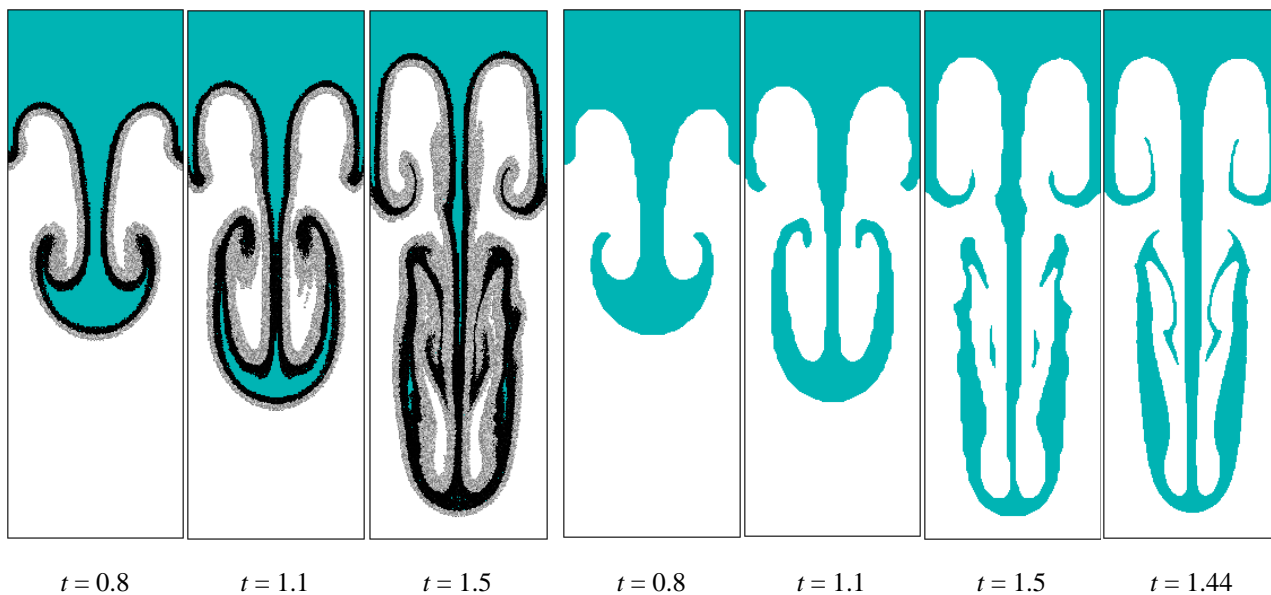


Fig. 5 Distribution of light and heavy fluid: (a) Hybrid method: (b) CIP method (60×180 grids): (c) CIP method (120×360 grids)

図 5(a)に Hybrid 法の計算結果を表す. また図 5(b)(c)は CIP 法を二種類の格子数で適用した結果であり, Hybrid 法の計算結果の定性的検証, および Hybrid 法の粒子挙動により補われる界面について検討した. 図 5 (c) ($t = 1.44$) は液相沈降位置が一致する時刻 (b)の $t = 1.5$) での結果を示す. 図 5 より Hybrid 法では重い流体が軽い流体に沈降して拡散する過程を定性的に再現できていることがわかる. また Hybrid 法の計算結果を, CIP 法単独での計算結果と比較すると, 数値拡散に伴う界面の消失が, Hybrid 法の粒子挙動により補われていることがわかる.

図 6 は計算結果の粒子数依存性を示したものである (重い流体用粒子の表示は省略している). 初期粒子間距離はそれぞれ, (a) 0.01 (b) 0.0067 (c) 0.005 である. 粒子間距離が短い (粒子数が多い) と, 分布の対称性が改善される傾向がある. この理由は粒子間距離が短いと, 粒子発生時に界面形状 (CIP 法から求まる液相率 0.5 の位置) に沿って粒子を配置し易くなり計算が安定化するためと考えられる.

3.2 ダム崩壊問題

複雑な気液界面挙動の予測精度を検証するため, Hybrid 法をダム崩壊問題で検証した. 図 7 に解析モデルを示す. 計算条件は越塚ら[4]の実験条件と同一として, 横 14.6 cm (図 7 中の記号 a), 高さ 29.2 cm ($2a$) の水柱が幅 58.4 cm ($4a$) の容器内で崩壊する過程を計算した. 計算では容器の高さは 116.8 cm ($8a$) とした. 空気密度は 1.2 kg/m^3 , 水密度は 998 kg/m^3 , 空気粘度は $1.8 \times 10^{-5} \text{ Pas}$, 水粘度は $1.0 \times 10^{-3} \text{ Pas}$, 重力加速度は 9.8 m/s^2 とし, 水の表面張力は無視した. また外周は壁面境界とした. 計算格子は 96×192 (格子間隔は 0.608 cm), 初期粒子間距離は 0.162 cm とした. 粒子の発生範囲は Rayleigh-Taylor 不安定問題の場合と同様の条件で設定した.

図 8 は水柱崩壊過程の計算結果を示したものである. 水柱は, 時刻 0.1 秒から 0.2 秒では重力により台形状に変形しながら右側へ進行する. その後, 時刻 0.3 秒付近で右壁面に衝突し, 水膜が壁面上昇し始める. 水膜は 0.5 秒付近を境に重力により下降を始める. そして時刻 0.7 から 0.9 秒では左側へ移動するようになる. これらの計算結果より, Hybrid 法を使用したことにより, 液相の気相への飛散および気相の液相への巻き込みが, 界面付近に配置された粒子の挙動により表現されていることがわかる.

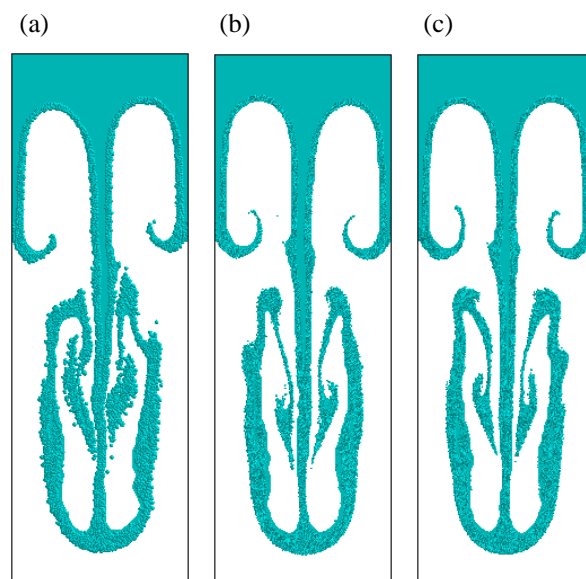


Fig. 6 Particle/number-of-density sensitivity study. Initial distance between particles were changed: (a) 0.01, (b) 0.0067 and (c) 0.005 (presently adopted)

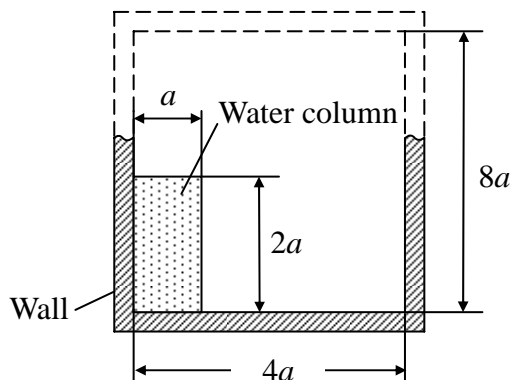


Fig. 7 Initial geometry for the simulation of collapse of water column

図 9 は格子解像度の異なる二種類の CIP 法の計算結果を比較して, Hybrid 解析における MPS 法の利用効果を評価した. 図 9 (a)は越塚と岡[4]による実験結果, (b)は 96×192 の計算格子での CIP 法の計算結果, (c)は 192×384 の計算格子での CIP 法の計算結果, (d)は Hybrid 法による計算結果 (96×192 の計算格子を使用) である. 図 9(b)と(c)の CIP 法の結果では, 格子解像度を 2 倍にすることで, 0.6 秒と 0.8 秒では水柱形状が改善される傾向が見られる. 一方, 図 9(d)の Hybrid 法の結果は(b)と同じ 96×192 の計算

格子使用しているにも関わらず、2 倍の格子解像度の結果に近い計算結果が得られていることがわかる。また計算時間に関しては、Hybrid 法は同じ格子解像度(96×192)のCIP法の約1.5倍の計算時間であり、計算負荷が大幅に増加しないことがわかった。

図10はHybrid解析の計算結果を定量的に評価するために、水柱右端位置の時間変化をMartinとMoyce [11]の実験結果と比較したものである。(a)は時刻0.24秒での水柱形状を、(b)は水柱右端の座標を示したものである。図10(b)ではMartinとMoyce [11]の実験結果に加えて、VOF法による計算結果[1]も比較のために示されている。

またHybrid法に関しては、初期粒子間距離が0.162 cm(図中のHybrid (1))と0.122 cm(図中のHybrid (2))の2ケースについても結果が示されている。図は無次元数で表示し、 t は時間、 g は重力加速度を示す。図10(b)より、Hybrid法の結果は検討した二種類の粒子間隔では同一の結果であった。またVOF法の結果と比較するとほぼ一致することがわかった。ただし無制限時間で2.0付近から僅かに差が発生する傾向がみられた。この原因は、図10(a)に示すように、Hybrid法では図中の丸印の右側に薄く染み出すような部分が発生するためである。

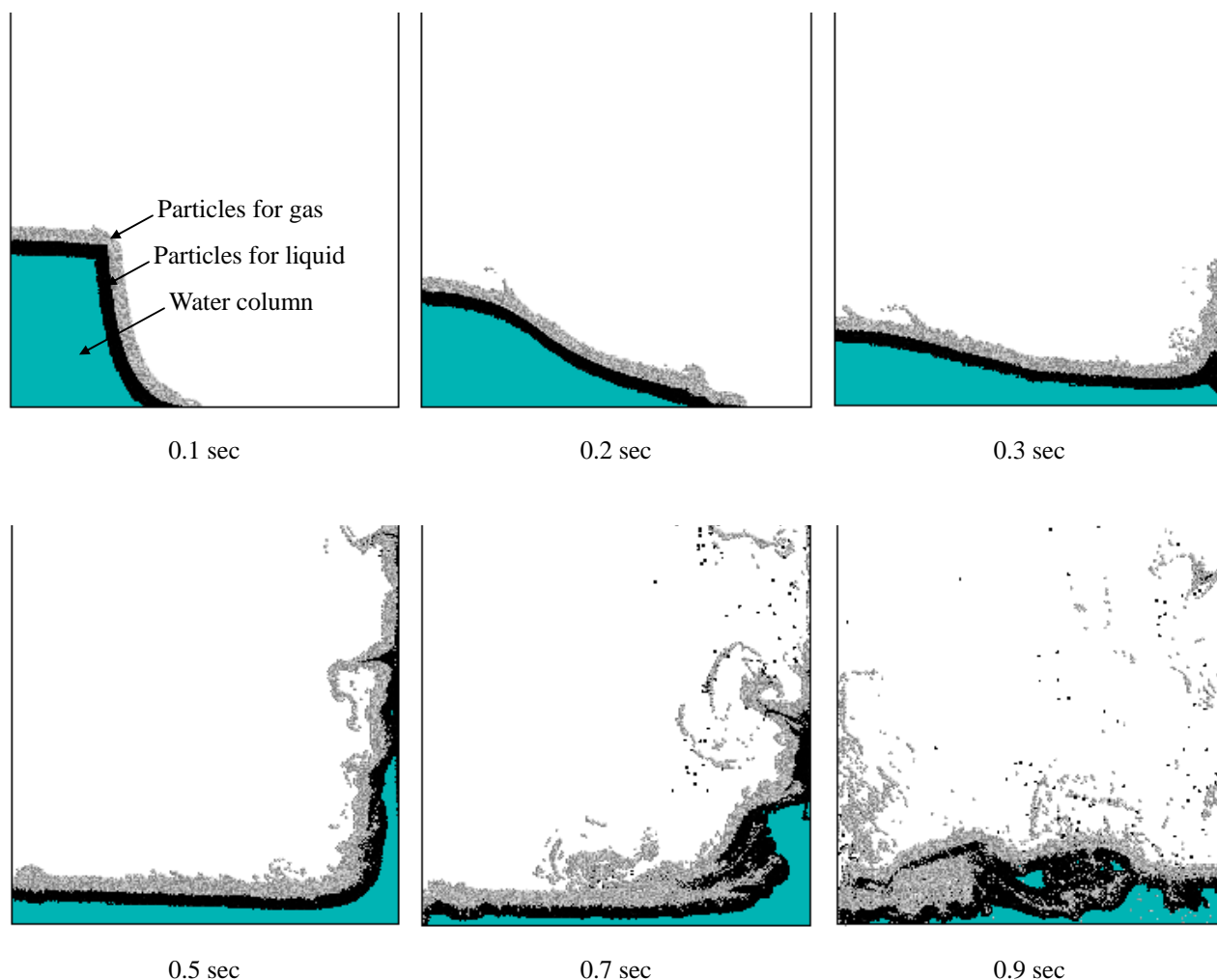


Fig. 8 Simulation of collapse of a water column using 96×192 grids with grid size of 0.608 cm. Initial distance between particles is 0.162 cm

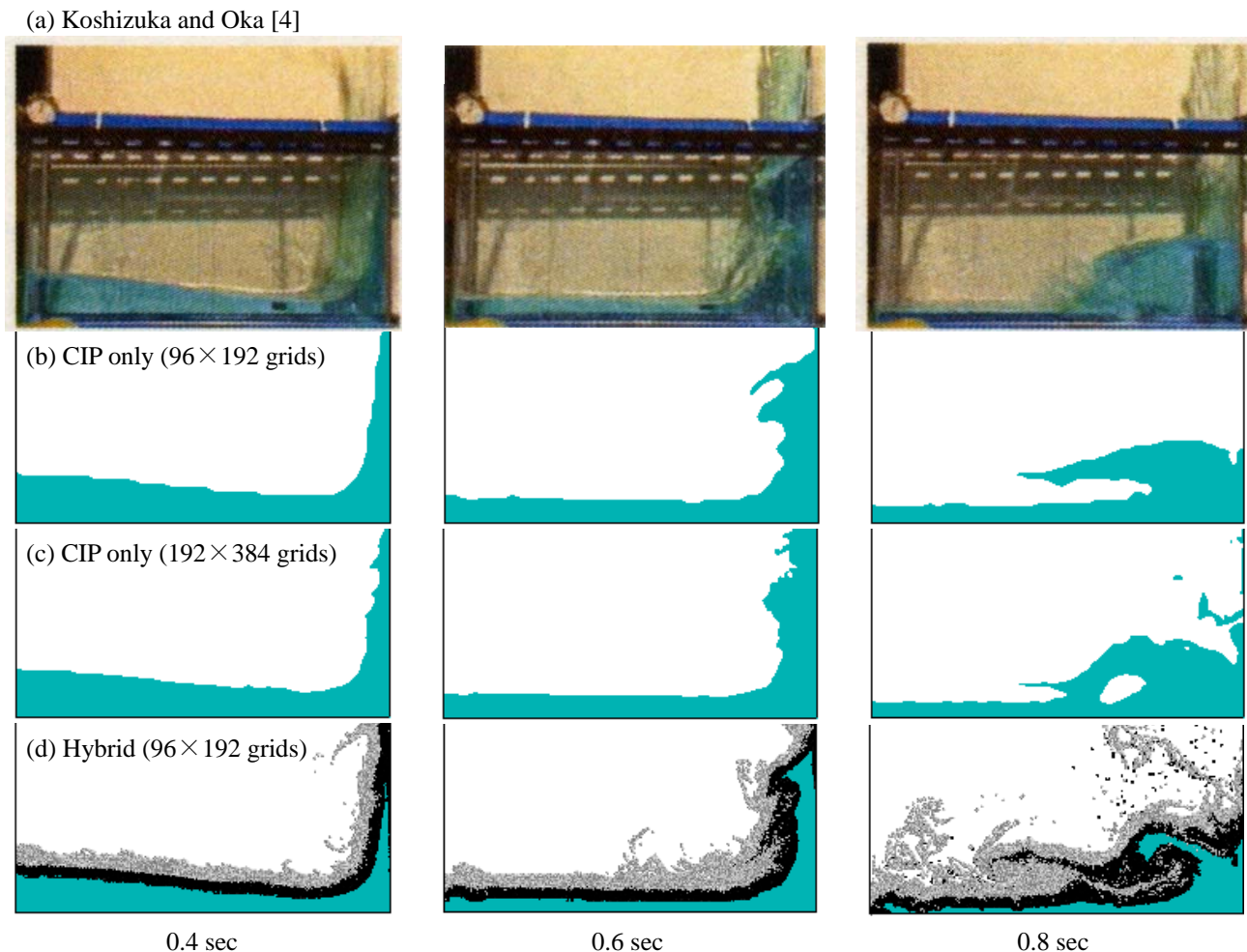


Fig. 9 Grid/number-of-density sensitivity study through the estimation of recovered scale with MPS by comparing cases using CIP: (a) measurements of Koshizuka and Oka [4], (b) CIP only (96×192 grids), (c) CIP only (192×384 grids) and (d) Hybrid (96×192 grids)

図 10(a)において丸印が付いているところの座標が VOF 法の計算結果と一致する座標である。よってこの薄い染み出しを取り除くことが今後の課題といえる。また VOF 法の計算結果が Martin と Moyce [11] の実験結果から外れる点に関しては、容器底面の濡れ性などにより実験では水柱右端先端が丸まるためと考えられる。

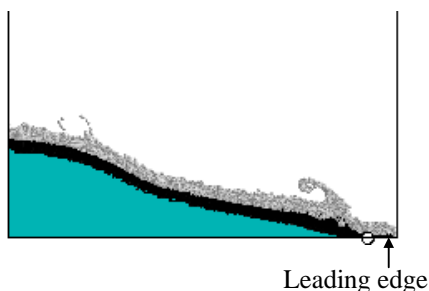
4 まとめ

マルチスケールの気液界面挙動を解析するため、界面近傍を気相用と液相用の二種類の粒子を配置した粒子法 (MPS 法) により計算し、他の領域は計算格子を用いる界面追跡法 (CIP 法) で計算する解析手法を検討した。

解析手法検証の第一ステップとして、Rayleigh-Taylor 不安定問題とダム崩壊問題に適用して以下の結論を得た。

- Rayleigh-Taylor 不安定問題に適用して定性的に妥当な結果が得られた。また CIP 法単独での計算結果と比較して数値拡散による界面の消失が低減されることがわかった。
- ダム崩壊問題での複雑な界面挙動を解析し、定性的に妥当な結果が得られた。また Hybrid 化しても計算負荷が大幅に増加しない (1.5 倍程度である) ことがわかった。

(a) Collapse of water column using hybrid method.



(b) Leading edge position.

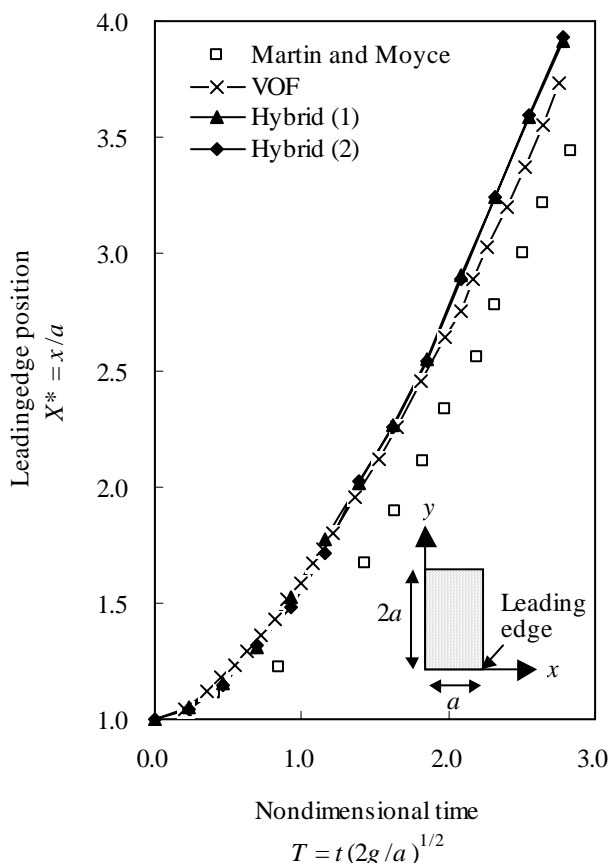


Fig. 10 Movement of a leading edge caused by the collapse of a water column

5 謝辞

ダム崩壊問題の実験写真を東京大学越塚教授よりご提供いただいたことに心から謝意を表す。

参考文献

[1] Hirt, C. W. and Nichols, B. D., “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, *Journal of Computational Physics*, **39** (1981),

201-225.
 [2] Sussman, M. Smereka, P., and Osher, S., “A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow”, *Journal of Computational Physics*, **114** (1994), 146-159.
 [3] Yabe, T. and Aoki, T., 1996, “A dream to solve dynamics of all materials together”, *Proceedings of International Conference on High-performance Computing in Automotive Design*, (1996), 2105-2108.
 [4] Koshizuka, S. and Oka, Y., “Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid”, *Nucl. Sci. Eng.*, **123** (1996), 421-434.
 [5] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J., “Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, **46** (1982), 429-453.
 [6] Liu, L., Koshizuka, S. and Oka, Y., “Computation of multiphase flow by coupling the MPS method with mesh method”, *日本原子力学会2003年春の年会* (2003), 479.
 [7] Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J., and Mitchell, I., “A hybrid particle level set method for improved interface capturing”, *Journal of Computational Physics*, **183** (2002), 83-116.
 [8] Ishii, E., Ishikawa, T and Tanabe, Y., “Particle/CIP hybrid method for predicting motions of micro and macro free surfaces”, *Proceedings of ASME HT-FED 2004*, Paper No. HT-FED2004-56142 (2004).
 [9] Ishii, E., Kameya, H., Watanabe, A. and Urashin, M., “Calculation of two-phase flows in an oil separator by using a cubic interpolated propagation code on unstructured grid spaces”, *Proceedings of ASME FEDSM’02*, Paper No. FEDSM2002-31229 (2002).
 [10] Ishii, E., Ishikawa, T and Tanabe, Y., “Simulation of liquid jet breakup using a combination of particle and grid methods”, *Proceedings of ASME FEDSM’05*, Paper No. FEDSM2005-77001 (2005).
 [11] Martin J. C. and Moyce W. J., “An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane”, *Phil. Trans. Royal Soc. of London*, **244** (1952), 312-324.